**Раздел 4. Методы и системы геометрического моделирования.**

**Тема 4.1.** Методы геометрического моделирования твердого тела. Понятие твердого тела на языке теории множеств. Методы геометрического моделирования скульптурных поверхностей. Каркасная или проволочная модель проектирования.

**4.1.1. Методы геометрического моделирования твердого тела.**

Твердотельная модель описывается в терминах того трехмерного объема, который занимает определяемое ею тело. Твердотельное моделирование является самым совершенным и самым достоверным методом создания копии реального объекта.

**Преимущества твердотельных моделей:**

* Полное определение объемной формы с возможностью разграничивать внутренний и внешние области объекта, что необходимо для взаимовлияний компонент.
* Обеспечение автоматического удаления скрытых линий.
* Автоматическое построение 3D разрезов компонентов, что особенно важно при анализе сложных сборочных изделий.
* Применение методов анализа с автоматическим получением изображения точных весовых характеристик методом конечных элементов.
* Получение тоновых эффектов, манипуляции с источниками света.

Методы создания трехмерных твердотельных моделей подразделяются на два класса:

* Метод конструктивного представления (C-Rep);
* Метод граничного представления (B-Rep).

**Метод конструктивного представления.**

Метод конструктивного представления заключается в построении твердотельных моделей, из базовых составляющих элементов, называемых твердотельными примитивами, и определяемых формой, размерами, точкой привязки и ориентацией.

Модель конструктивной геометрии представляет собой бинарный древовидный граф  , где   - множество вершин - базовые элементы формы - примитивы, из которых конструируется объект, а   - множество ребер, которые обозначают теоретико-множественные операции, выполняемые над соответствующими базовыми элементами формы.

Каждый примитив модели задан множеством атрибутов:   где   координаты точки привязки локальной СК к системе целого объекта;  углы поворота,   метрические параметры объекта.

Булевы операции являются существующим инструментарием для построения модели при определении взаимоотношений между соседними примитивами. Булевы операции базируются на понятиях алгебраической теории множеств, и имеют обычный смысл, когда применяются к твердотельным объектам. Наиболее часто следующие операции: пересечение, объединение и разность.

**Метод граничного представления.**

Граничное представление - описание границ объекта или точного аналитического задания граней, описывающих тело. Это единственный метод, позволяющий создать точное, а не приближенное представление геометрического твердого тела. При таком подходе от пользователя требуется задание контуров или границ объекта, а также эскизы разных видов объектов, и указание линий связей между этими видами, чтобы можно было установить взаимное соответствие.

**Плюсы и минусы.**

Каждый из двух названных методов имеет свои достоинства и недостатки, по сравнению с другим. Система с c-rep представлением имеет преимущества при первоначальном формировании модели, так как поострить объемную модель правильной формы из объемных примитивов с использованием булевых операций достаточно просто. Кроме того, этот метод обеспечивает более компактное описание модели в БД. Однако b-rep представление является актуальным при создании сложных форм, которые воссоздать с помощью c-rep метода очень трудоемко.

В c-rep методе модель хранится в виде комбинации данных и логических процедур, при этом требуется меньше памяти, но большим оказывается объем вычислений при воспроизведении модели. С другой стороны модели c b-rep представлением хранит точное описание границ модели, для этого нужно больше памяти, но не требуется почти никаких вычислений для воссоздания изображения.

Относительным достоинством систем с b-rep является сравнительная простота преобразования граничного представления в соответствующую каркасную модель и обратно. Причина такой простоты заключается в том, что описание границ подобно описанию каркасной модели, а это облегчает преобразование модели из одной формы в другую, и делает системы с b-rep представлением совместимыми с уже имеющимися системами.

Примеры систем твердотельного моделирования:

* PowerShape,
* SolidEdge,
* T-Flex CAD.
* CATIA,
* CADDS5,
* EUCLID.

**4.1.2. Понятие твердого тела на языке теории множеств.**

В математике (геометрии) предметом рассмотрения является мнимое твёрдое тело, в котором сохраняются лишь вид и размеры при полном отвлечении от всех других свойств. В отличие от настоящих предметов геометрические тела, как и всякие геометрические фигуры, является мнимыми объектами.

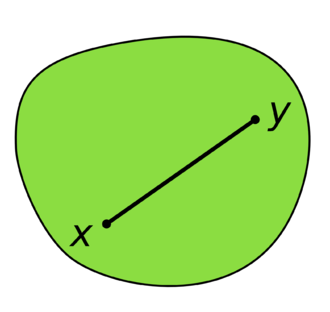
**Геометрическое тело** — [связная](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B2%D1%8F%D0%B7%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) часть [пространства](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)), ограниченная замкнутой поверхностью своей наружной границы. Геометрическое тело можно определить замкнутой поверхностью, которая будет являться его границей. Геометрическим телом называют также [компактное множество](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) точек, и две точки из множества можно соединить отрезком, который целиком будет проходить внутри границы тела, что указывает на состояние геометрического тела из множества [внутренних точек](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%BD%D1%83%D1%82%D1%80%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F%D1%8F_%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B0).

Наружная граница геометрического тела называется гранью, тело может иметь одну или множество граней. Множество плоских граней определяет множество вершин и ребер геометрического тела.

**Примеры:  
1) Выпуклое тело.**

**Определение.** Выпуклое множество в [аффинном](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%84%D1%84%D0%B8%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) или [векторном](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) пространстве — [множество](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE), содержащее вместе с любыми двумя [точками](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)) соединяющий их [отрезок](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%82%D1%80%D0%B5%D0%B7%D0%BE%D0%BA).  
Пусть A — [аффинное](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%84%D1%84%D0%B8%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) или [векторное пространство](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) над [полем](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D0%B5_(%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0)) [вещественных чисел](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D1%89%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) \mathbb{R}.  
 [Множество](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) K\subset A называется выпуклым, если вместе с любыми двумя [точками](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)) x,\;y\in K множеству K принадлежат все точки отрезка xy, соединяющего в пространстве A точки x и y. Этот отрезок можно представить как

\bigcup\limits_{t\in[0;\;1]}\{x+t\cdot\overrightarrow{xy}\}.

 **Выпуклое множество**

- Примерами выпуклых подмножеств в двумерном [Евклидово пространство] (\R^2) являются [правильные многоугольники](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA).

- Примерами выпуклых подмножеств в трёхмерном евклидовом пространстве (\R^3) являются [архимедовы тела](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D1%85%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%BE_%D1%82%D0%B5%D0%BB%D0%BE) и [правильные многогранники](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA).

**2) Тела вращения**

**Тела вращения** — объёмные тела, возникающие при вращении плоской геометрической фигуры, ограниченной кривой, вокруг оси, лежащей в той же плоскости

**Примеры.**- [Шар](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D0%B0%D1%80_(%D1%81%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)) — образован полукругом, вращающимся вокруг диаметра разреза **-** [Цилиндр](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B8%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B4%D1%80) — образован прямоугольником, вращающимся вокруг одной из сторон.   
**-** [Конус](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%83%D1%81) — образован прямоугольным треугольником, вращающимся вокруг одного из катетов . **-** [Тор](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%80_(%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C)) — образован окружностью, вращающейся вокруг прямой, не пересекающей его.

**3) Многогранник**

**Многогранник** или **полиэдр** — обычно замкнутая поверхность, составленная из [многоугольников](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA), но иногда так же называют тело, ограниченное этой поверхностью.

**Определение.** Многогранник, точнее трёхмерный многогранник — совокупность конечного числа плоских [многоугольников](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA) в трёхмерном [евклидовом пространстве](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D0%B8%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%BE_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE), такая, что:

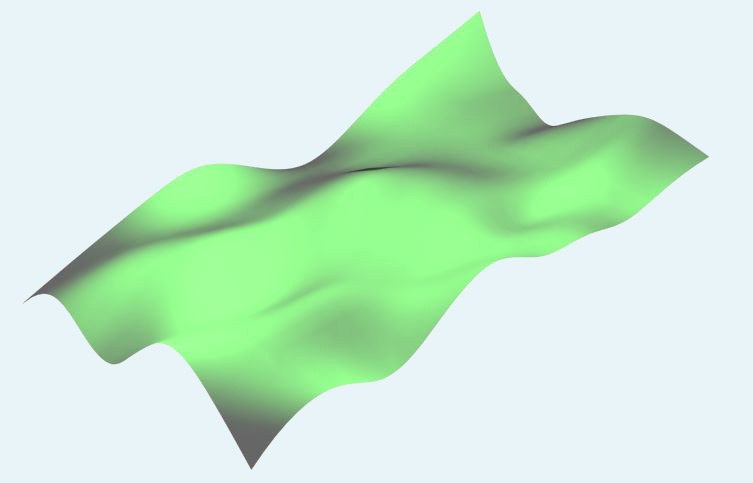
1. каждая сторона любого из многоугольников есть одновременно сторона другого (но только одного), называемогосмежным с первым (по этой стороне);
2. связность: от любого из многоугольников, составляющих многогранник, можно дойти до любого из них, переходя к смежному с ним, а от этого, в свою очередь, к смежному с ним, и т. д.

Эти многоугольники называются гранями, их стороны — рёбрами, а их вершины — вершинами многогранника.

Простейшим примером многогранника является выпуклый многогранник, то есть граница такого ограниченного подмножества евклидова пространства, которое является пересечением конечного числа полупространств.

**4.1.3. Методы геометрического моделирования скульптурных поверхностей.**

Скульптурные поверхности (поверхности свободных форм или произвольные поверхности) – это поверхности, к которым нельзя применить математические закономерности или поверхности с произвольными образующими. Методы геометрического моделирования скульптурных поверхностей сложной технической формы применяют в областях, в которых проектируются динамические поверхности или поверхности, к которым предъявляются повышенные эстетические требования. Динамические поверхности подразделяются на 2 класса: омываемые средой (внешние обводы самолетов, подводных лодок), трассирующие среду (воздушные и гидравлические каналы, турбины). При проектировании скульптурных поверхностей применяют каркасно-кинематический метод, основанный на перемещении некоторых образующих по направляющим или путем построения сплайнов, продольных образующих кривых между точками, определенными в трехмерном пространстве. Методы отображения скульптурных поверхностей в значительной степени связаны с возможностями графических устройств. При этом отображение самой поверхности не играет существенной роли, так как основное назначение этих методов визуальная проверка корректности, гладкости и эстетичности полученной поверхности. В настоящее время модели скульптурных поверхностей широко используются при проектировании и производстве корпусов автомобилей, самолетов, предметов домашнего обихода.



**Рис. Скульптурная поверхность**

**4.1.4. Каркасная или проволочная модель проектирования.**

Каркасная модель полностью описывается в терминах точек и линий. Это моделирование самого низкого уровня и имеет ряд серьезных ограничений, большинство из которых возникает из-за недостатка информации о гранях, которые заключены между линиями, и невозможности выделить внутреннюю и внешнюю область изображения твердого объемного тела.

Однако каркасная модель требует меньше памяти и вполне пригодна для решения задач, относящихся к простым. Каркасное представление часто используется не при моделировании, а при отображении моделей как один из методов визуализации.

Наиболее широко каркасное моделирование используется для имитации траектории движения инструмента, выполняющего несложные операции по 2.5 или 3 осям. Понятие 2.5 оси связано с тем, что более простые системы могут обрабатывать информацию о формах только с постоянным поперечным сечением. Такую форму можно построить следующим образом - сначала создается вид  , а затем каждой точке приписываются два значения координаты  , характеризующие глубину изображения.

**Недостатки каркасной модели:**

- Неоднозначность - для того, чтобы представить модель в каркасном виде, нужно представить все ребра (это эффект может привести к непредсказуемым результатам. Нельзя отличить видимые грани от невидимых. Операцию по удалению невидимых линий можно выполнить только в ручную с применением команд редактирования каждой отдельной линии, но результат этой работы равносилен разрушению всей созданной каркасной конструкции, т.к. линии невидимы в одном виде и видимы в другом);

- Невозможность распознавания криволинейных граней - мнимые ребра (боковые поверхности цилиндрической формы реально не имеют ребер, хотя на изображении есть изображение некоторых мнимых ребер, которые ограничивают такие поверхности. Расположение этих мнимых ребер меняется в зависимости от направления вида, поэтому эти силуэты не распознаются как элементы каркасной модели и не отображаются на них);

- Невозможность обнаружить взаимное влияние компонент (каркасная модель не несет информации о поверхностях, ограничивающих форму, что обуславливает невозможность обнаружения нежелательных взаимодействий между гранями объекта и существенно ограничивает использование каркасной модели в пакетах, имитирующих траекторию движения инструмента или имитацию функционирования робота, так как при таком моделировании не могут быть выявлены на стадии проектирования многие коллизии, появляющиеся при механической сборке);

- Трудности, связанные с вычислением физических характеристик;

- Отсутствие средств выполнения тоновых изображений (основным принципом техники выполнения тоновых изображений, т.е. обеспечение плавных переходов различных цветов и нанесение светотени, является то, что затенению подвергаются грани, а не ребра).